Übungsaufgaben zur Kurvendiskussion von e-Funktionen

Diskutieren Sie folgende Funktionen hinsichtlich des Definitions- und Wertebereichs, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, mögliche Extrempunkte sowie Wendepunkte. Geben Sie weiterhin das Verhalten im Unendlichen an und skizzieren Sie anschließend den Graphenverlauf.

1. $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} \cdot (x^2 - 2)$

2. $f(x) = e^{1-x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (1 + x)$

4. $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

5. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{4x}$

6. $f(x) = e^{-3x} \cdot (2x - 4)$

7. $f(x) = (x - 2) \cdot e^{0,5x}$

Anmerkung: Auf die Skizze des Graphen kann in Aufgabe 6 verzichtet werden.

Lösungen

1. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y > -\frac{1}{4}e^2$

   Ableitungen: $f'(x) = e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)$; $f''(x) = e^{2x} \cdot \left(x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right)$;

   $f'''(x) = e^{2x} \cdot (2x^2 + 6x - 1)$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

   Nullstellen: $N_1\left(\sqrt{2}; 0\right)$ und $N_2\left(-\sqrt{2}; 0\right)$

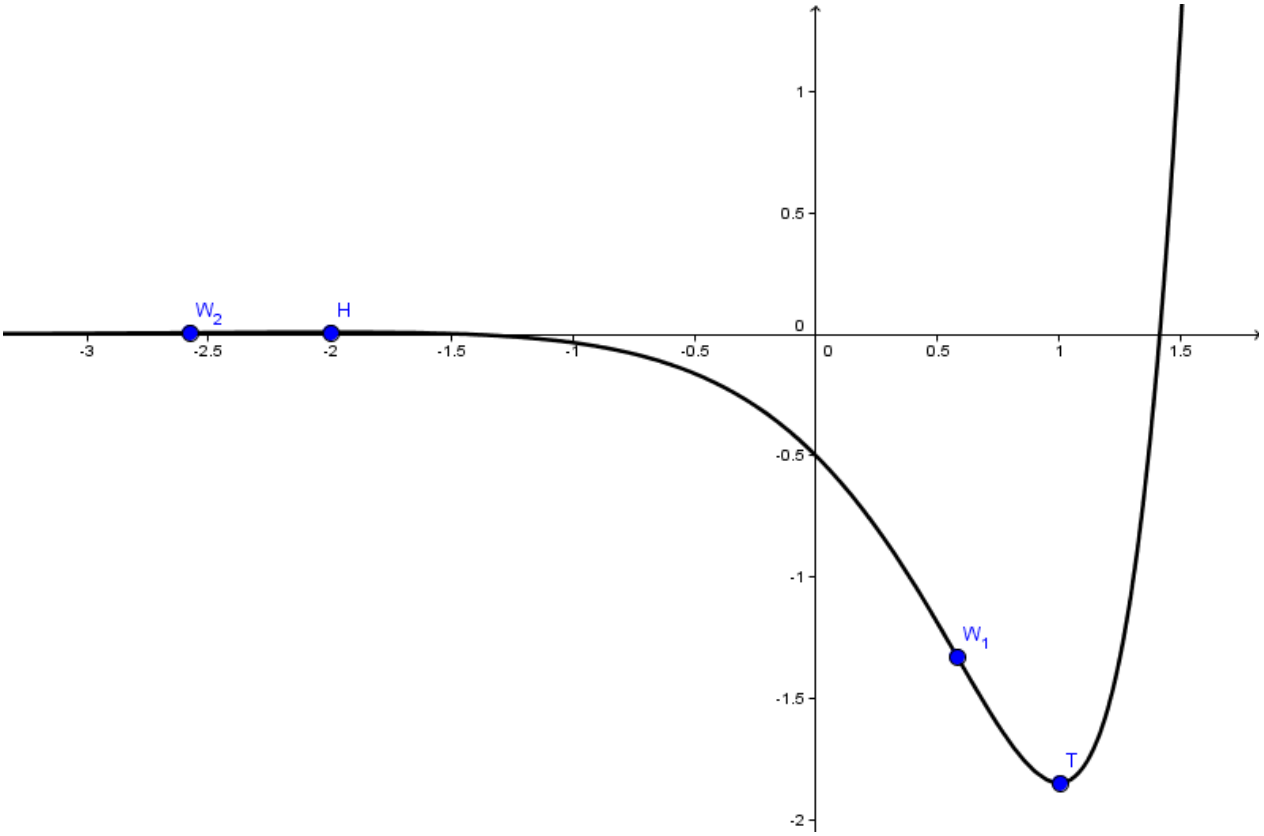
   Symmetrie: keine Symmetrie

   Extrempunkte: Tiefpunkt $T\left(1; -\frac{1}{4}e^2\right)$ und Hochpunkt $H\left(-2; \frac{1}{2e^4}\right)$

   Wendepunkte: $W_1(0{,}58; -1{,}33)$ und $W_2(-2{,}58; 0{,}007)$

   Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

   Schaubild:



2. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y < e$

Ableitungen: $f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$; $f''(x) = 2e^{1-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$; $f'''(x) = 4e^{1-x^2} \cdot (-2x^3 + 3x)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; e)$

Nullstellen: keine Nullstellen

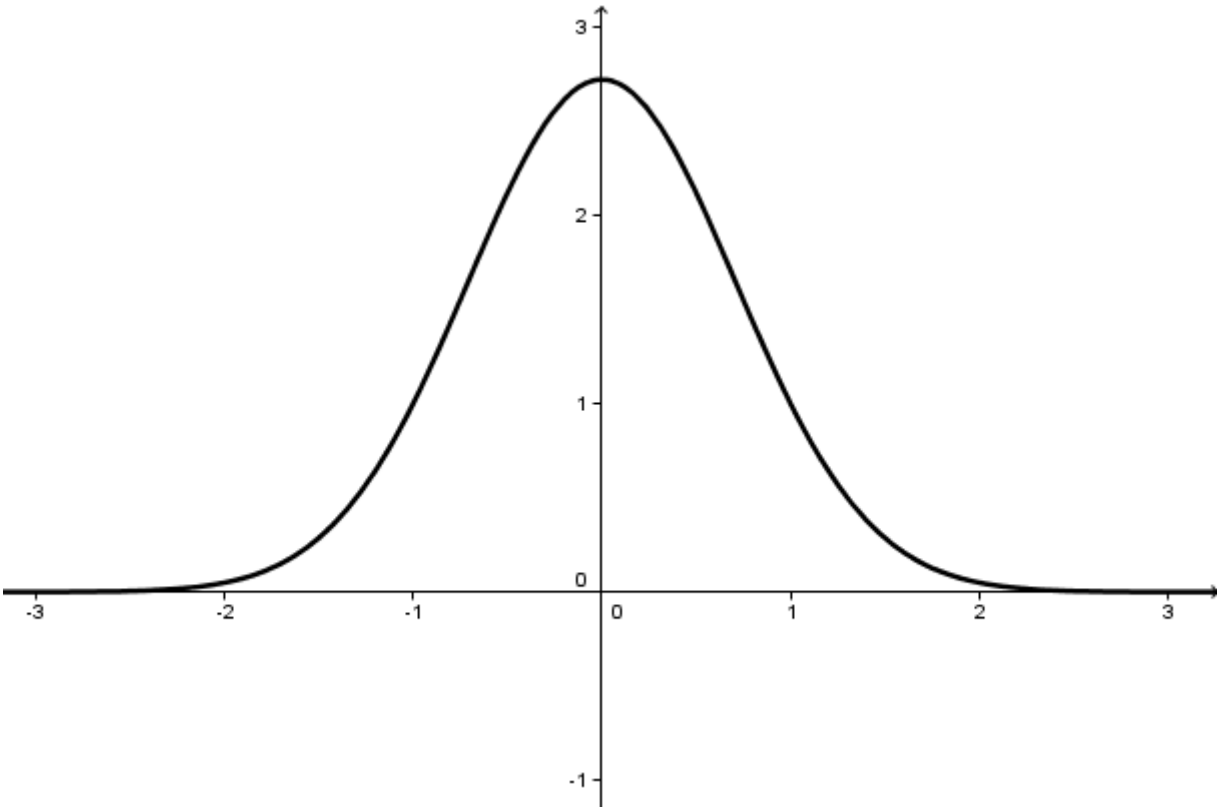
Symmetrie: Achsensymmetrie

Extrempunkte: Hochpunkt $H(0; e)$

Wendepunkte: $W_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; 1{,}65\right)$ und $W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; 1{,}65\right)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Schaubild:



3. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y < \frac{e}{4}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (-2x-1)$; $f''(x) = 2x \cdot e^{-2x}$; $f'''(x) = e^{-2x} \cdot (2-4x)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Nullstellen: $N(-1;0)$

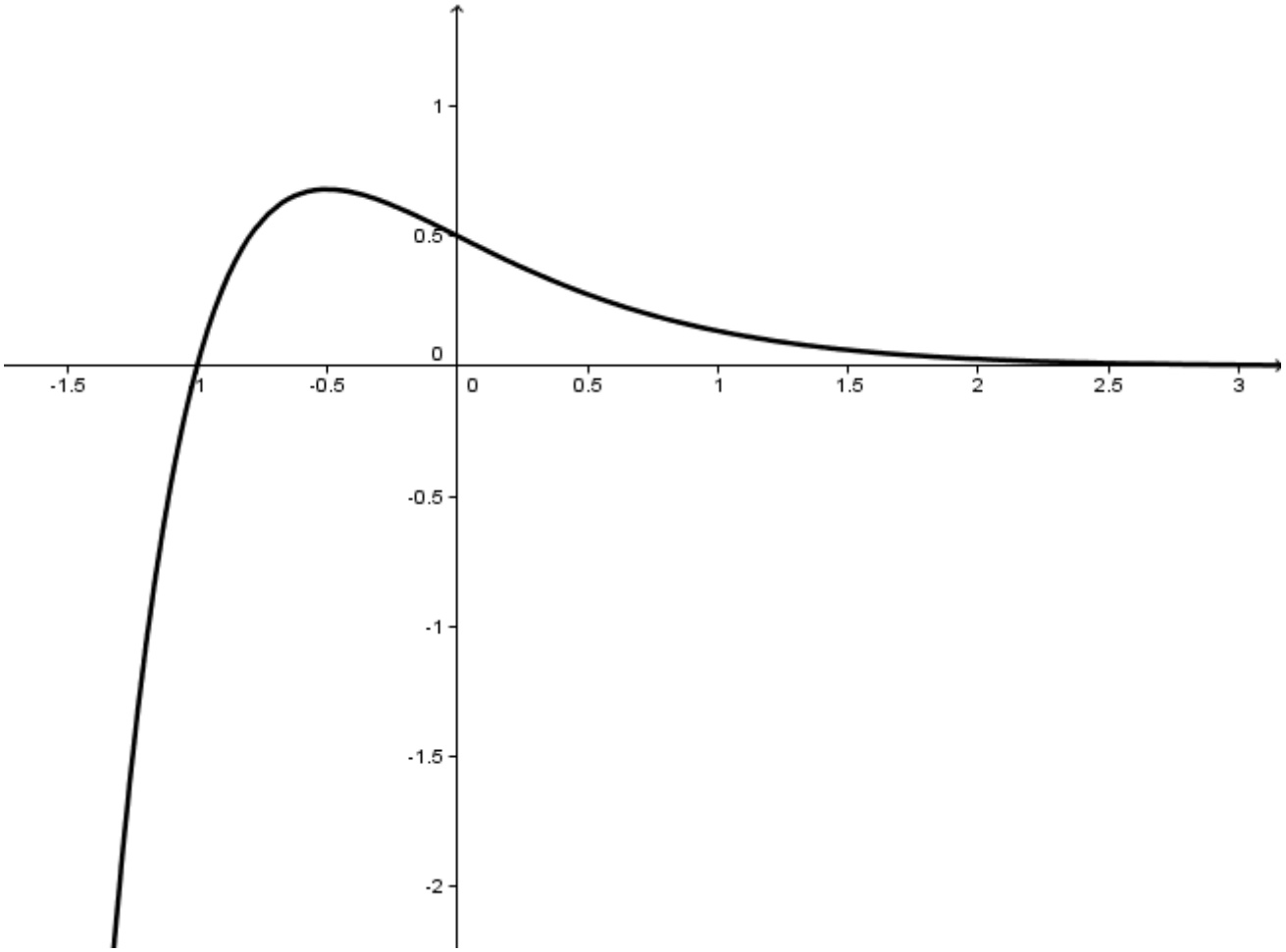
Symmetrie: keine Symmetrie

Extrempunkte: Hochpunkt $H\left(-\frac{1}{2};\frac{e}{4}\right)$

Wendepunkte: $W\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Schaubild:



4. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge -2e^{-\frac{3}{2}} < y < 1$

Ableitungen: $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (x^3 - 3x)$; $f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x^4 + 6x^2 - 3)$;

$$f'''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (x^5 - 10x^3 + 15x)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; 1)$

Nullstellen: $N_1(1; 0)$ und $N_2(-1; 0)$

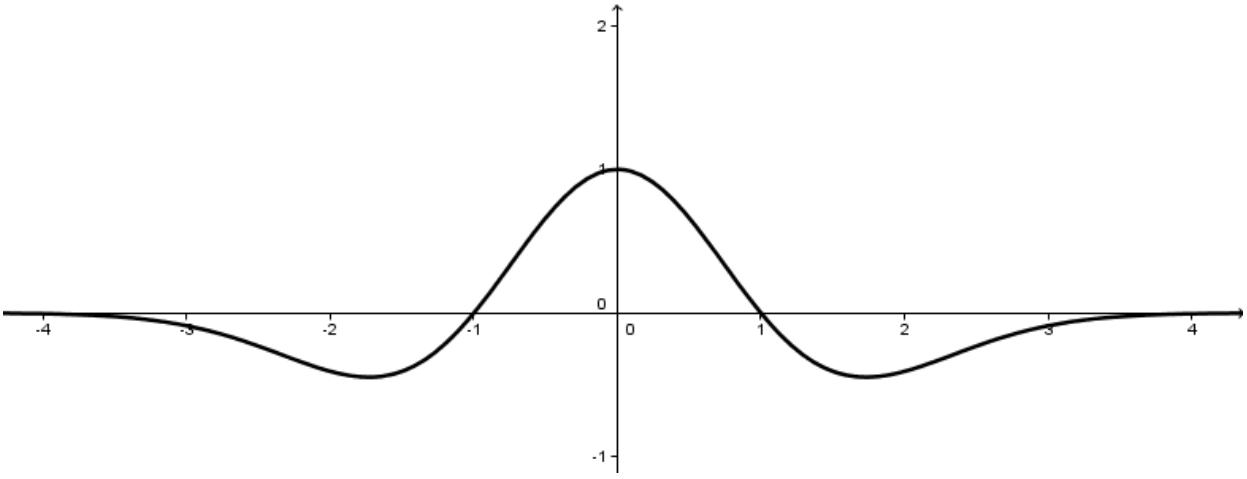
Symmetrie: Achsensymmetrie

Extrempunkte: Tiefpunkte $T_1\left(\sqrt{3}; -2e^{-\frac{3}{2}}\right)$ und $T_2\left(-\sqrt{3}; -2e^{-\frac{3}{2}}\right)$ und Hochpunkt $H(0; 1)$

Wendepunkte: $W_1(2{,}33; -0{,}29)$; $W_2(-2{,}33; -0{,}29)$; $W_3(0{,}74; 0{,}34)$ und $W_4(-0{,}74; 0{,}34)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Schaubild:



5. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge -2e^{-\frac{3}{2}} < y < 1$

Ableitungen: $f'(x) = e^{4x} \cdot (4x^2 + 2x + 4)$; $f''(x) = e^{4x} \cdot (16x^2 + 16x + 18)$;

$f'''(x) = e^{4x} \cdot (64x^2 + 96x + 88)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; 1)$

Nullstellen: keine Nullstelle

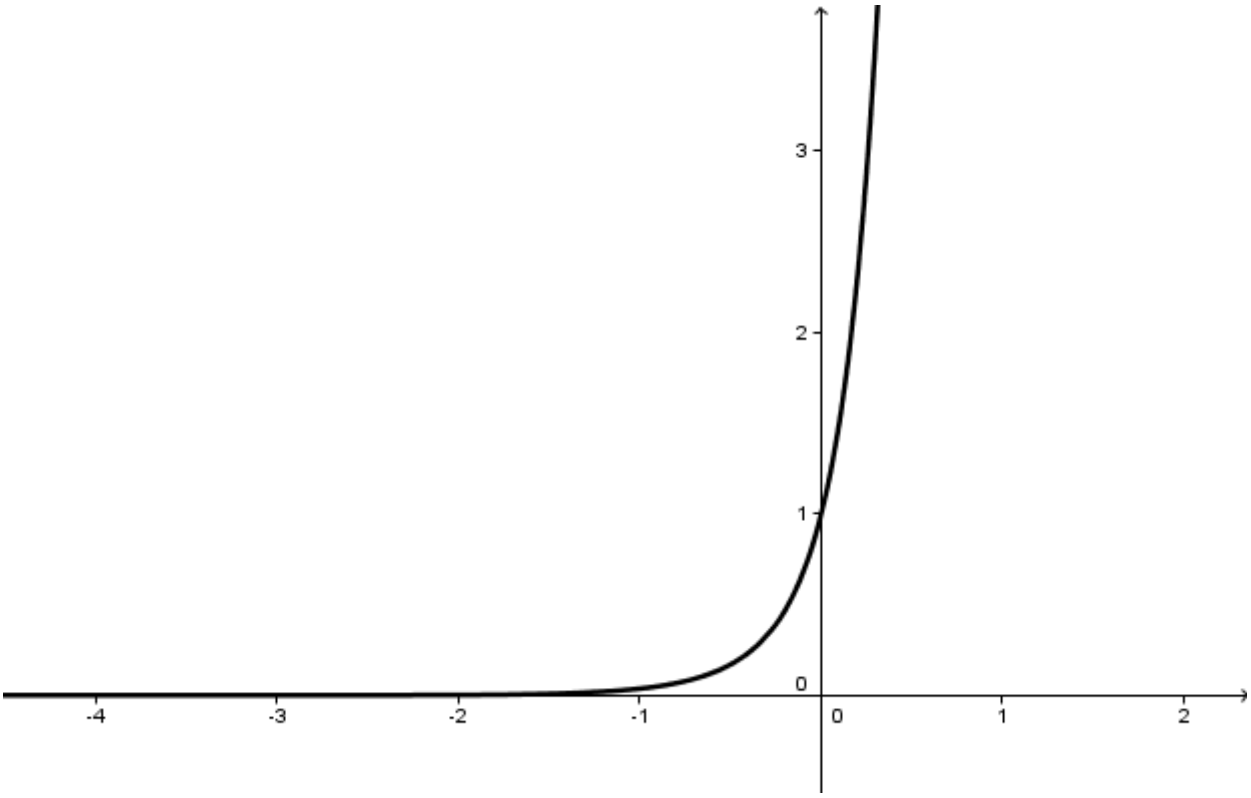
Symmetrie: keine Symmetrie

Extrempunkte: keine Extrempunkte

Wendepunkte: keine Wendepunkte

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Schaubild:



6. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y < \frac{2}{3e^7}$

   Ableitungen: $f'(x) = e^{-3x} \cdot (-6x + 14)$; $f''(x) = e^{-3x} \cdot (18x - 48)$; $f'''(x) = e^{-3x} \cdot (-54x + 162)$

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; -4)$

   Nullstellen: $N(2; 0)$

   Symmetrie: keine Symmetrie

   Extrempunkte: Hochpunkt $H\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3e^7}\right)$

   Wendepunkte: $W\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3e^8}\right)$

   Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

   Schaubild: kann verzichtet werden, da die Werte extrem klein sind

7. DB $x \in \mathbb{R}$ WB: $y \in \mathbb{R} \wedge y > -2$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $f''(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right)$; $f'''(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x\right)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_Y(0; -2)$

Nullstellen: $N(2; 0)$

Symmetrie: keine Symmetrie

Extrempunkte: Tiefpunkte $T(0; -2)$

Wendepunkte: $W\left(-2; -\frac{4}{e}\right)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

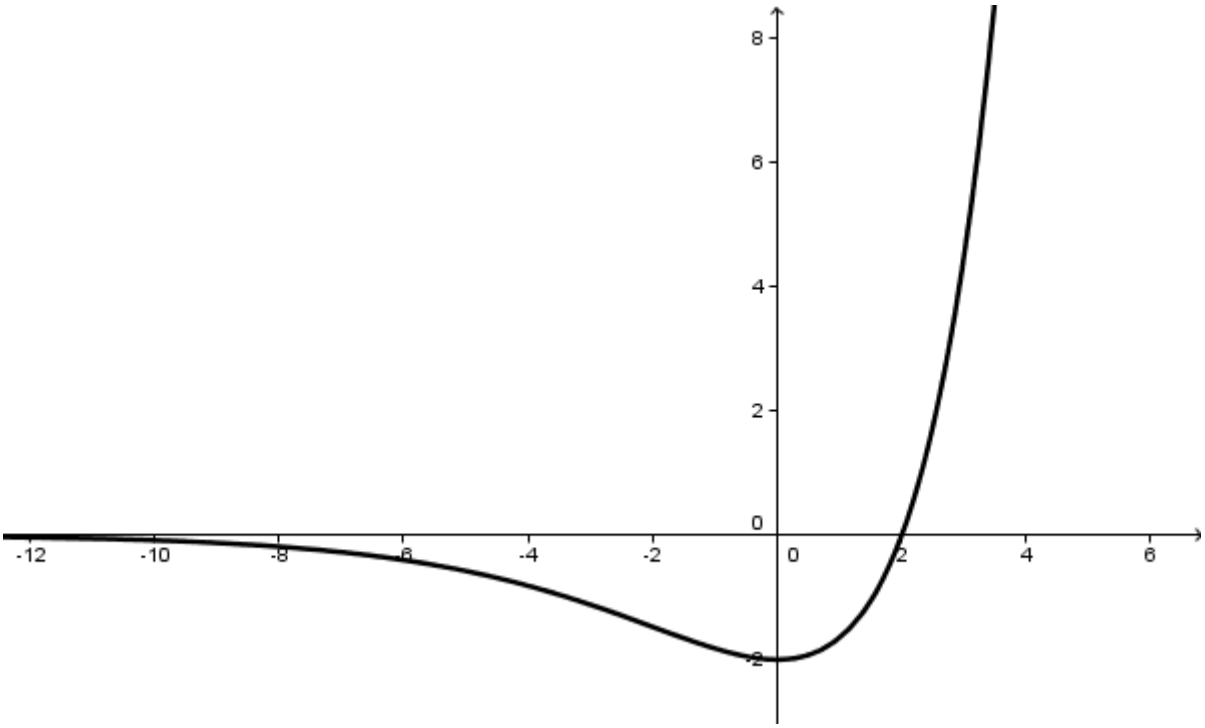



Schaubild: