Vorbereitungsaufgaben – Mathematik

1. Bruchrechnung

1.1. Grundlagen:

gebrochene Zahl

gemeiner Bruch	Dezimalbruch
$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$	Ganze, Zehntel Hundertstel Tausendstel…

Kürzen: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren

Beispiel: $\frac{27}{36}$ gekürzt mit 9 sind $\frac{3}{4}$

Erweitern: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren

Beispiel: $\frac{2}{3}$ erweitert mit 8 sind $\frac{16}{24}$

(Hinweis: Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, beschreiben dieselbe gebrochene Zahl.)

Addition / Subtraktion: 1. Brüche gleichnamig machen (durch Erweitern bzw. Kürzen)
2. Zähler addieren / subtrahieren, Nenner beibehalten

Beispiel: $\frac{4}{7} + \frac{3}{4} = \frac{16 + 21}{28} = \frac{37}{28} = 1\frac{9}{28}$

Multiplikation: 1. Zähler multiplizieren
2. Nenner multiplizieren

Beispiel: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$

Division: 1. Reziproke des Divisors bilden
2. Brüche multiplizieren

Beispiel: $\frac{4}{7} : \frac{3}{4} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{21}$

1.2. Übungsaufgaben:

a) $$\frac{6 - 3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{8} - \frac{3}{8}}{\left(4\frac{3}{10} - 2\frac{1}{5}\right) + \left(7\frac{11}{20} - \frac{53}{20}\right)}$$

b) $$\frac{\frac{1}{4} : \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{16}\right)}{\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{25}\right) \cdot \frac{1}{2}}$$

c) $\frac{4}{9} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\right) \bullet 4 : \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{12}\right)$

d) $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \bullet \left(\frac{3}{5} + \frac{9}{20}\right)$

2. Terme

2.1. Grundlagen:

Terme sind Zahlen und Variablen, die sinnvoll durch Rechenzeichen miteinander verbunden sind.

Beispiele: 12; $a + b$; $6x^2$; $4x \bullet (6 - 7z)^3$; $\frac{9 + n}{4}$; $\sqrt[3]{x}$

Potenzen:

Potenz = Produkt gleicher Faktoren

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{n Faktoren}}} \qquad (n \in \mathbb{N}^* \wedge n > 1)$$

Exponent (Hochzahl)

$$3^4 = 81$$

Potenz — Potenzwert

Basis (Grundzahl)

Erweiterter Potenzbegriff:

$a^1 = a \quad (a \in \mathbb{R})$ $\qquad$ $a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$ $\qquad$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

Potenzgesetze

- Gleiche Potenzterme, die in der Basis und im Exponent übereinstimmen, lassen sich bei Addition und Subtraktion zusammenfassen.

$$b \bullet a^n \pm c \bullet a^n = a^n \bullet (b \pm c)$$

- gleiche Basis: $\boxed{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$ (Multiplikation)

$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ (Division) ($a \neq 0$)

- gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (Multiplikation)

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$ (Division) ($b \neq 0$)

- Potenzieren von Potenzen: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Jede Wurzel lässt sich als Potenz darstellen, dabei gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$)

Terme vereinfachen:

→ Gleichartige Terme wie 2x, 6x oder 9x lassen sich durch Addieren oder Subtrahieren zusammenfassen, verschiedenartige dagegen nicht.

$4x + 7x - 2x = 9x$ $\qquad$ $8x + 5y - 3x + 2y = 5x + 7y$

→ Bei einem Produkt aus Termen werden die Zahlfaktoren (Koeffizienten) und die Variablen getrennt multipliziert.

$12 \cdot 3a = 36a$ $\qquad$ $7x \cdot 3y = 21xy$ $\qquad$ $5a \cdot 4a = 20a^2$

→ Quotienten von Termen lassen sich vereinfachen, indem man den Quotienten der Zahlfaktoren (Koeffizienten) mit dem Quotienten der Variablen multipliziert.

$42a : 6 = 7a$ $\qquad$ $12xy : (-2y) = -6x$ $\qquad$ $21x^2 : 7x = 3x$

Klammern auflösen:

→ Beim Auflösen einer Minusklammer erhalten die Summanden in der Klammer das entgegengesetzte Vorzeichen.

$$\begin{aligned} 4a - (5a - 4b) &= 4a - 5a + 4b \\ &= -a + 4b \end{aligned}$$

→ Mit dem Distributivgesetz werden Klammern ausmultipliziert.

$$\begin{aligned} (3x + 5)(x - 7) &= 3x^2 - 21x + 5x - 35 \\ &= 3x^2 - 16x - 35 \end{aligned}$$

2.2. Aufgaben

1. Entscheiden Sie, ob ein Term vorliegt:

a) 45 $\qquad$ b) 3 + 2 $\qquad$ c) 24 + $\qquad$ d) 3 + 2 : 5

e) 32x + : 8 $\qquad$ f) (36a – 4) : 12 $\qquad$ g) $\sqrt{\frac{x - 12}{3y + 4}}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

a) $110a - [(40b - 46a) + 2 (56a - 2b)] - 3 (15a - 12b)$

b) $[0{,}6x - 0{,}3 (0{,}08y - 0{,}04z)] - 0{,}2 [0{,}4 (0{,}9x - 0{,}3y) - 2z]$

c) $\frac{a^4 b^x}{c} \cdot \frac{b^2 c^y}{a^6}$

d) $\frac{(18a^{-2}b^3)^{-5}}{(27a^6)^{-2}} : (6a^{-4}b^2)^{-5}$

3. Gleichungen

3.1. Grundlagen:

Lineare Gleichungen – Gleichungen ersten Grades

Gleichungen sind Terme, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Lineare Gleichungen beinhalten die gesuchte Variable in der ersten Potenz.
Eine Zahl heißt Lösung der Gleichung, wenn sie eingesetzt für die Variable die Gleichung zu einer wahren Aussage macht. Alle Zahlen, die Lösungen der Gleichung sind, bilden die Lösungsmenge.
Lineare Gleichungen besitzen

- keine Lösung → Lösungsmenge ist leer: L = { } bzw. L = ∅,
- eine Lösung → die Lösungsmenge enthält ein Element oder
- unendlich viele Lösungen → die Lösungsmenge enthält alle Zahlen aus dem Variablengrundbereich: z.B.: L = IR (IR – Zahlenbereich der reellen Zahlen).

Schritte beim Lösen linearer Gleichungen

- Terme auf beiden Seiten vereinfachen
- Summanden mit Variable auf der einen Seite und Summanden ohne Variable auf der anderen Seite der Gleichung ordnen
- beide Seiten durch den Zahlfaktor der Variable dividieren
- Probe durchführen (Ergebnis in die Ausgangsgleichung einsetzen)
- Lösungsmenge angeben

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4x - 7 \cdot (2x + 8) &= 3x + (5x - 4) \cdot (-12) - 5x && \mid \text{Klammern auflösen} \\ 4x - 14x - 56 &= 3x - 60x + 48 - 5x && \mid \text{Zusammenfassen} \\ -10x - 56 &= -62x + 48 && \mid +62x;\ +56 \\ 52x &= 104 && \mid :52 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } 4 \cdot 2 - 7 \cdot (2 \cdot 2 + 8) = 3 \cdot 2 + (5 \cdot 2 - 4) \cdot (-12) - 5 \cdot 2$$
$$8 - 7 \cdot 12 = 6 + 6 \cdot (-12) - 10$$
$$\underline{-76 = -76} \quad \text{(w.A.)}$$

$$\underline{\underline{L = \{2\}}}$$

Quadratische Gleichungen – Gleichungen zweiten Grades

Quadratische Gleichungen enthalten die gesuchte Variable in der zweiten Potenz (im Quadrat). Sie besitzen

- keine Lösung,
- eine Lösung,
- zwei Lösungen oder
- unendlich viele Lösungen.

Schritte beim Lösen quadratischer Gleichungen

- Normalform $x^2 + px + q = 0$ herstellen
- Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ anwenden
- Probe durchführen
- Lösungsmenge angeben

Beispiel:

$$1 - 4 \cdot (2x + 1) = x^2 + 4 \quad | \text{ Klammern auflösen}$$
$$1 - 8x - 4 = x^2 + 4 \quad | -x^2; -4$$
$$-x^2 - 8x - 7 = 0 \quad | : (-1)$$
$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$p = 8; q = 7$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 7}$$
$$x_{1,2} = -4 \pm 3$$
$$\underline{\underline{x_1 = -7}}; \underline{\underline{x_2 = -1}}$$

$$\text{Probe: } x_1 = -7 \rightarrow \quad 1 - 4 \cdot (2 \cdot (-7) + 1) = (-7)^2 + 4$$
$$1 - 4 \cdot (-13) = 53$$
$$\underline{53 = 53} \quad \text{(w.A.)}$$

$$x_2 = -1 \rightarrow 1 - 4 \cdot (2 \cdot (-1) + 1) = (-1)^2 + 4$$
$$1 - 4 \cdot (-1) = 5$$
$$\underline{5 = 5} \quad \text{(w.A.)}$$

$$\underline{\underline{L = \{-7; -1\}}}$$

Satz von Vieta: $p = -(x_1 + x_2)$; $q = x_1 \cdot x_2$

(Hinweis: Mit Hilfe des Satzes von Vieta können die Lösungen nur bezüglich der Normalform überprüft werden!)

3.2. Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen (G = IR)

   a) $7x - 2 = 2x + 13$ b) $\frac{3x + 2}{4} = \frac{2x - 1}{2}$

   c) $3 (5x + 2) = 7 (x - 3)$ d) $3 (2x + 6) = 20x - 10$

2. In welchem Rechteck mit dem Umfang 20 cm ist die eine Seite

   a) um 3 cm größer

   b) um 4 cm kleiner als die andere ?

3. Nach Abzug von 15% Lohnsteuer beträgt das Gehalt eines Arbeitnehmers 2911,59€. Wie hoch ist es vor dem Abzug?

4. Ein Darlehen wird mit 8% verzinst und nach 282 Tagen einschließlich Zinsen mit 35705,60€ zurückgezahlt. Berechnen Sie den Darlehensbetrag und die Zinsen!

5. Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen (G = IR)!

   a) $x^2 = 625$ b) $x^2 + 225 = 0$

   c) $7x^2 + 42x - 14 = 0$ d) $10x^2 - 110x + 70 = 2x^2 - x + 5$

   e) $(x + 2) \bullet (x + 1) + (x - 3) \bullet (x - 2) = 32 - 4x$

6. Ein Baugrundstück hat eine Fläche von 675m². Es hat die Form eines Rechtecks und ist 3mal so lang wie breit. Berechnen Sie Länge und Breite des Grundstücks!

7. Zwei Röhren füllen einen Behälter in 14 Minuten. Die eine Röhre braucht zum Füllen 10 Minuten länger als die andere. Wie lange benötigt jede Röhre allein?

4. Funktionen

4.1. Grundlagen:

Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung, bei der jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet wird.

$x \in D$ → unabhängige Variable (Argument)
$y \in W$ → abhängige Variable (Funktionswert)

D → Definitionsbereich (Menge aller x)
W → Wertebereich (Menge aller y)

Funktionsgleichung: $y = f(x) = \underbrace{2x + 1}_{\text{Funktionsterm}}$

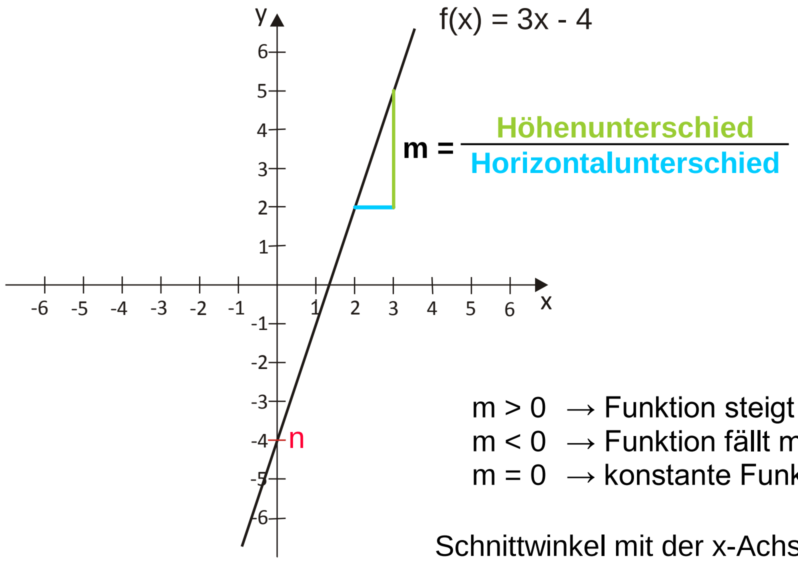
Lineare Funktionen – ganzrationale Funktionen ersten Grades

Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = mx + n$ heißt lineare Funktion. Der Graph linearer Funktionen ist eine Gerade mit der Steigung (Anstieg) m, die die y-Achse in P_y (0; n) schneidet.

Anstieg m

z.B.: $f(x) = 3x - 4$

Absolutglied n → P_y (0; – 4)



m > 0 → Funktion steigt monoton
m < 0 → Funktion fällt monoton
m = 0 → konstante Funktion

Schnittwinkel mit der x-Achse: $\tan \alpha = m$

- Achsenschnittpunkte:

  - Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0 \rightarrow f(0) = m \cdot 0 + n = n \rightarrow P_y(0; n)$
  - Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0 \rightarrow \quad 0 = m \cdot x + n \qquad | -n;\ : m$

$$x = -\frac{n}{m}$$

Nullstelle

$$\rightarrow P_x\left(-\frac{n}{m}; 0\right)$$

- Lage zweier Graphen zueinander:

  - parallel → gleicher Anstieg: $m_1 = m_2$
  - senkrecht → Produkt der Anstiege ist – 1: $m_1 \cdot m_2 = -1$ bzw. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
  - Schnittwinkel zwischen zwei Geraden: $\tan \varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

- Berechnen der Schnittpunktkoordinaten zweier Graphen:

  - Funktionsterme gleichsetzen
  - entstandene Gleichung lösen → x – Koordinate
  - Lösung in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen und y – Koordinate berechnen

• Gleichungen linearer Funktionen:

Normalform: $\boxed{y = f(x) = mx + n}$

Punktrichtungsform: $\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$ $(x_0 ; y_0)$ – beliebiger Punkt der Funktion

Zweipunkteform: $\boxed{y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)}$ $(x_0 ; y_0)$ und $(x_1 ; y_1)$ – beliebige Punkte der Funktion

Quadratische Funktionen – ganzrationale Funktionen zweiten Grades

Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) heißt quadratische Funktion.
Der Graph der Funktion ist eine Parabel, deren höchster bzw. tiefster Punkt Scheitelpunkt heißt.

Koordinaten des Scheitelpunktes: $S\left(-\frac{b}{2a} ; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Eigenschaften:

- $a > 0 \rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
  $a < 0 \rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet
- $|a| < 1 \rightarrow$ Parabel gestaucht
  $|a| > 1 \rightarrow$ Parabel gestreckt

• Achsenschnittpunkte:

y-Achse: $x = 0 \rightarrow f(0) = a \bullet 0^2 + b \bullet 0 + c \rightarrow P_y\,(0; c)$

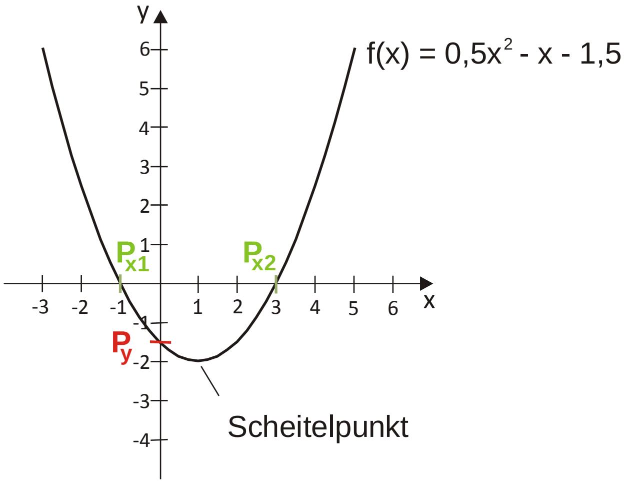
x-Achse: $y = 0 \rightarrow$ Funktionsterm Null setzen und entstandene quadratische Gleichung lösen
(Möglichkeiten: kein Schnittpunkt, ein Schnittpunkt, zwei Schnittpunkte)

• Gleichungen quadratischer Funktionen:

allgemeine Form: $\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$

Scheitelpunktform: $\boxed{f(x) = a\,(x - u)^2 + v}$ (u; v) – Scheitelpunkt der Funktion

Beispiel: $f(x) = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5$



4.2. Aufgaben

1. Ermitteln Sie den Anstieg, die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse und die Schnittpunkte untereinander der Graphen folgender Funktionen:

a) $y = \frac{1}{2}x - 2$

b) $y = 4$

c) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$

2. Geben Sie die Funktionsgleichungen der Geraden an, deren Schnittpunkte P_x und P_y bekannt sind !

a) $P_x\left(\frac{2}{5}; 0\right)$; $P_y(0; 2)$

b) $P_x\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $P_y(0; -2)$

3. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der

Geraden $g(x) = 0{,}5x + 2$ und der Parabel $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 3$

miteinander und mit den Achsen!
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem!

4. Ein ohmscher Widerstand $R = 22\Omega$ (10 W) ist gegeben.

a) Stellen Sie die Leistung P, die er aufnimmt, als Funktionsterm des Stromes I dar!
b) Geben Sie den Definitionsbereich an!
c) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen!

Lösungen

1. Bruchrechnung

a) 1 b) $\frac{25}{23}$ c) $3\frac{4}{9}$ d) $\frac{7}{6}$

2. Terme

1a) ja b) ja (Summe) c) nein d) ja (Summe)
e) nein f) ja (Quotient) g) ja (Wurzel)

2a) $-a$ b) $0{,}528x + 0{,}412z$

c) $\frac{b^{x+2}\, c^{y-1}}{a^2}$ d) $\frac{3a^2}{b^{15}}$

3. Gleichungen

1a) L = { 3 } b) L = { 4 } c) L = $\left\{ -\frac{27}{8} \right\}$ d) L = { 2 }

2a) 3,5cm x 6,6cm b) 7cm x 3cm

3. 3425,40€

4. Darlehensbetrag: 33600,00€; Zinsen: 2105,60€

5a) L = { - 25; 25 } b) L = { }

c) L = { - 6,32; 0,32 } d) L = { 0,625; 13 }

e) L = { - 4; 3 }

6. Länge: 45m; Breite: 15m

7. werden bearbeitet

4. Funktionen

1a) m = 0,5; P_x (4; 0); P_y (0; 2)
b) m = 0; P_x existiert nicht; P_y (0; 4)
c) m = - 0,4; P_x (3,75; 0); P_y (0; 1,5)

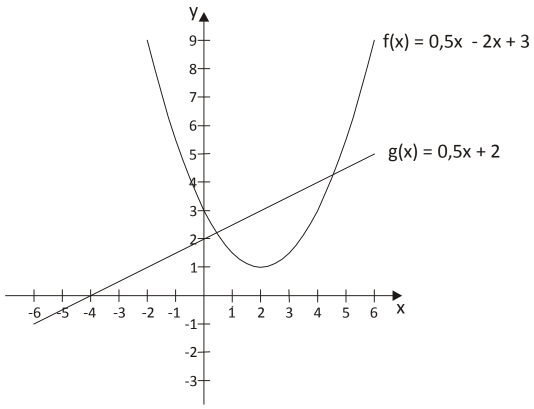
Schnittpunkte: a) mit b) → S (12; 4)
b) mit c) → S (- 6,25; 4)
a) mit c) → S $\left(\frac{35}{9} ; -\frac{1}{18} \right)$

2a) y = - 5x + 2 b) y = 3x – 2

3. Schnittpunkte g(x) mit f(x) → S_1 (0,44; 2,22); S_2 (4,56; 4,28)

Achsenschnittpunkte: g(x) → P_x (- 4; 0); P_y (0; 2)
f (x) → keine Schnittpunkte mit der x-Achse; P_y (0; 3)

Funktionsgraphen:



4. werden bearbeitet

Weitere Hinweise:

- Tafelwerke und Tabellenbücher, die Ihnen zur Verfügung stehen, sollten für die Sekundarstufe 2 geeignet sein

- als Taschenrechner empfehlen wir den CASIO fx-991ES, der auch erst zu Studienbeginn erworben werden kann (evtl. Sammelbestellung)
  (programmierbare und grafikfähige Taschenrechner sind nicht zugelassen)